

Aplikasi Sistem Persamaan Linier dalam Persoalan Dunia Nyata (*real world problem*)

Bahan Kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

**Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB**

A. Nutritional Analysis

Sumber: *College Algebra*, Fifth Edition,
James Stewart , Lothar Redlin, Saleem Watson

- A nutritionist is performing an experiment on student volunteers.

- He wishes to feed one of his subjects a daily diet that consists of a combination of three commercial diet foods:

- MiniCal
 - LiquiFast
 - SlimQuick

- For the experiment, it's important that, every day, the subject consume exactly:
 - 500 mg of potassium
 - 75 g of protein
 - 1150 units of vitamin D

- The amounts of these nutrients in one ounce of each food are given here.

	MiniCal	LiquiFast	SlimQuick
Potassium (mg)	50	75	10
Protein (g)	5	10	3
Vitamin D (units)	90	100	50

- How many ounces of each food should the subject eat every day to satisfy the nutrient requirements exactly?

- Let x , y , and z represent the number of ounces of MiniCal, LiquiFast, and SlimQuick, respectively, that the subject should eat every day.

- This means that he will get:
 - 50x mg of potassium from MiniCal
 - 75y mg from LiquiFast
 - 10z mg from SlimQuick

- This totals $50x + 75y + 10z$ mg potassium.

	MiniCal	LiquiFast	SlimQuick
Potassium (mg)	50	75	10
Protein (g)	5	10	3
Vitamin D (units)	90	100	50

- Based on the requirements of the three nutrients, we get the system

$$\begin{cases} 50x + 75y + 10z = 500 & \text{Potassium} \\ 5x + 10y + 3z = 75 & \text{Protein} \\ 90x + 100y + 50z = 1150 & \text{Vitamin D} \end{cases}$$

- Dividing the first equation by 5 and the third by 10 gives the system

$$\begin{cases} 50x + 75y + 10z = 500 & \text{Potassium} \\ 5x + 10y + 3z = 75 & \text{Protein} \\ 90x + 100y + 50z = 1150 & \text{Vitamin D} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 10x + 15y + 2z = 100 \\ 5x + 10y + 3z = 75 \\ 9x + 10y + 5z = 115 \end{cases}$$

- We can solve this using Gaussian elimination.
- Alternatively, we could use a graphing calculator to find the reduced row-echelon form of the augmented matrix of the system.

Solution: $x = 5, y = 2, z = 10$

- Every day, the subject should be fed:
 - 5 oz of MiniCal
 - 2 oz of LiquiFast
 - 10 oz of SlimQuick

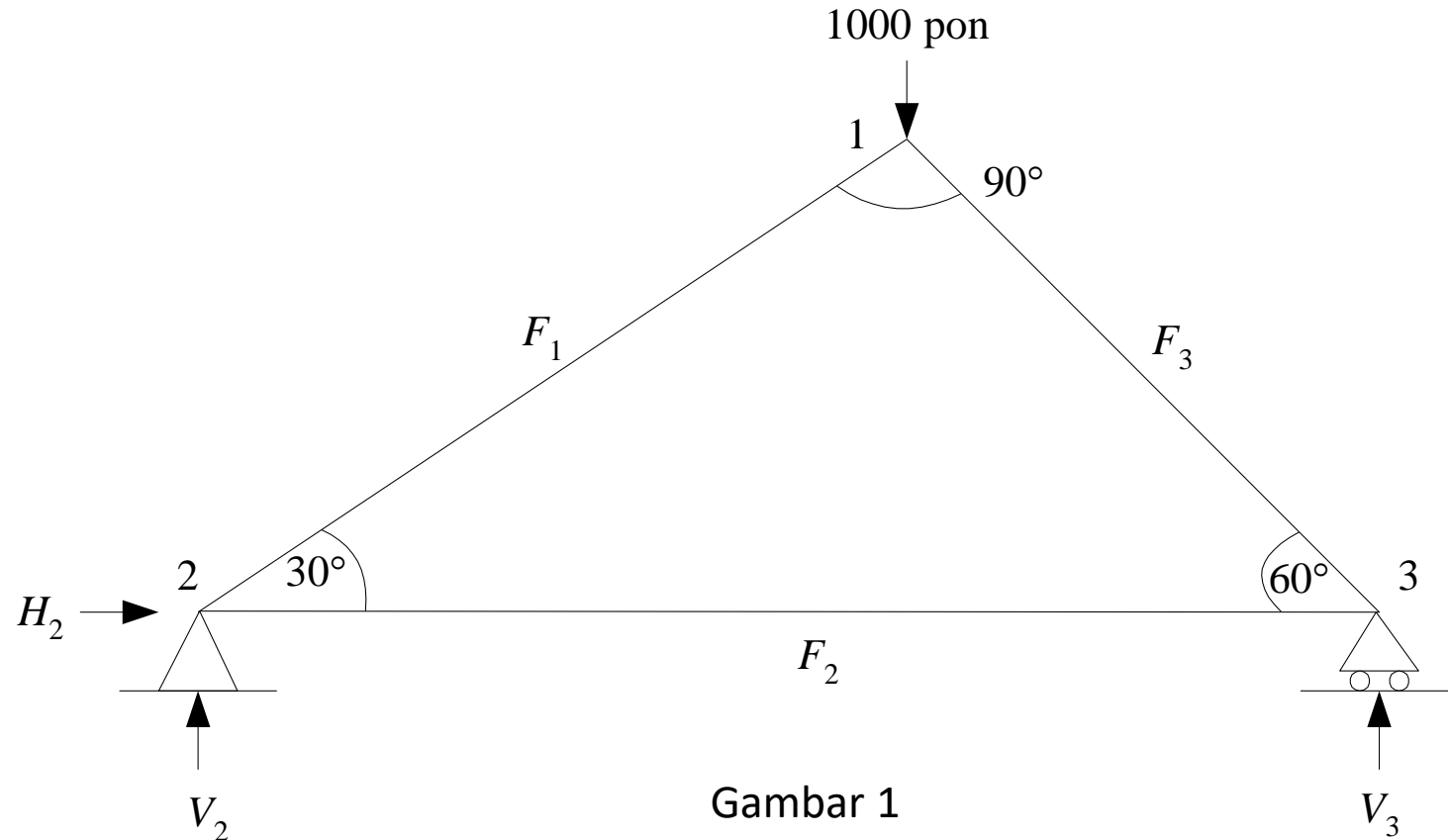
	MiniCal	LiquiFast	SlimQuick
Potassium (mg)	50	75	10
Protein (g)	5	10	3
Vitamin D (units)	90	100	50

- A more practical application might involve dozens of foods and nutrients rather than just three.
 - Such problems lead to systems with large numbers of variables and equations.
 - Computers or graphing calculators are essential for solving such large systems.

B. Sistem Persamaan Linier dalam bidang Teknik Sipil

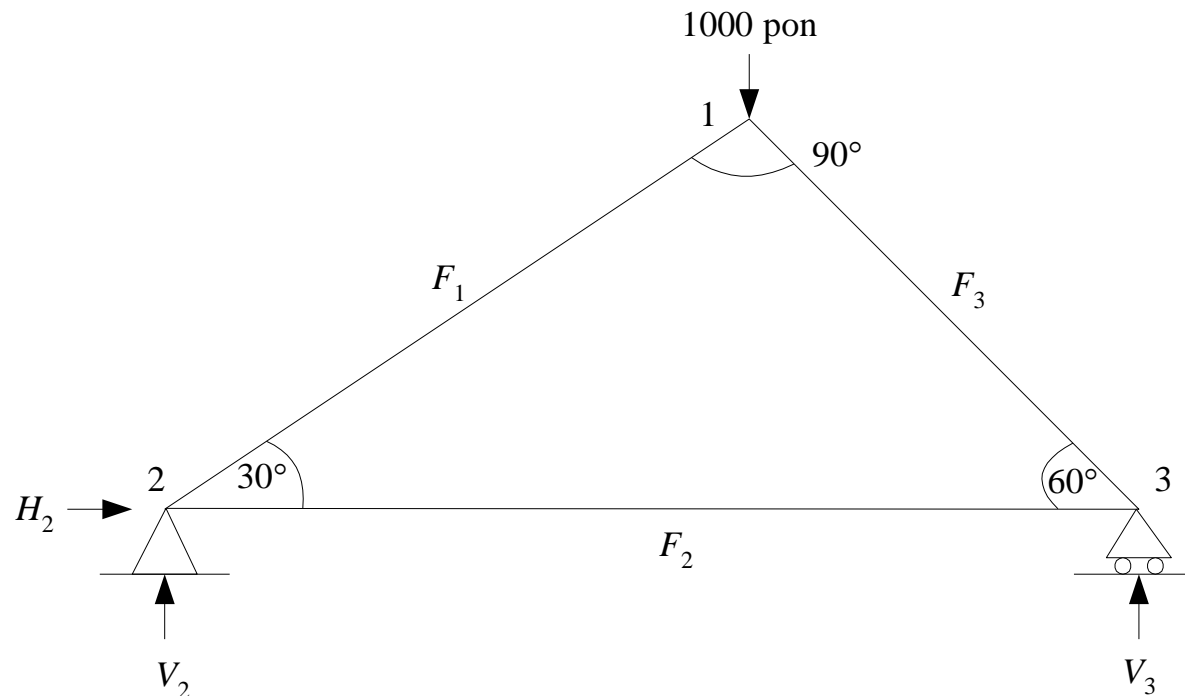
Sumber: Chapra, Steven C dan Canale, Raymond P,
*Numerical Methods for Engineers with Personal
Computer Applications*, MacGraw-Hill Book
Company

- Seorang insinyur Teknik Sipil merancang sebuah rangka statis yang berbentuk segitiga (Gambar 1). Ujung segitiga yang bersudut 30° bertumpu pada sebuah penyangga statis, sedangkan ujung segitiga yang lain bertumpu pada penyangga beroda.

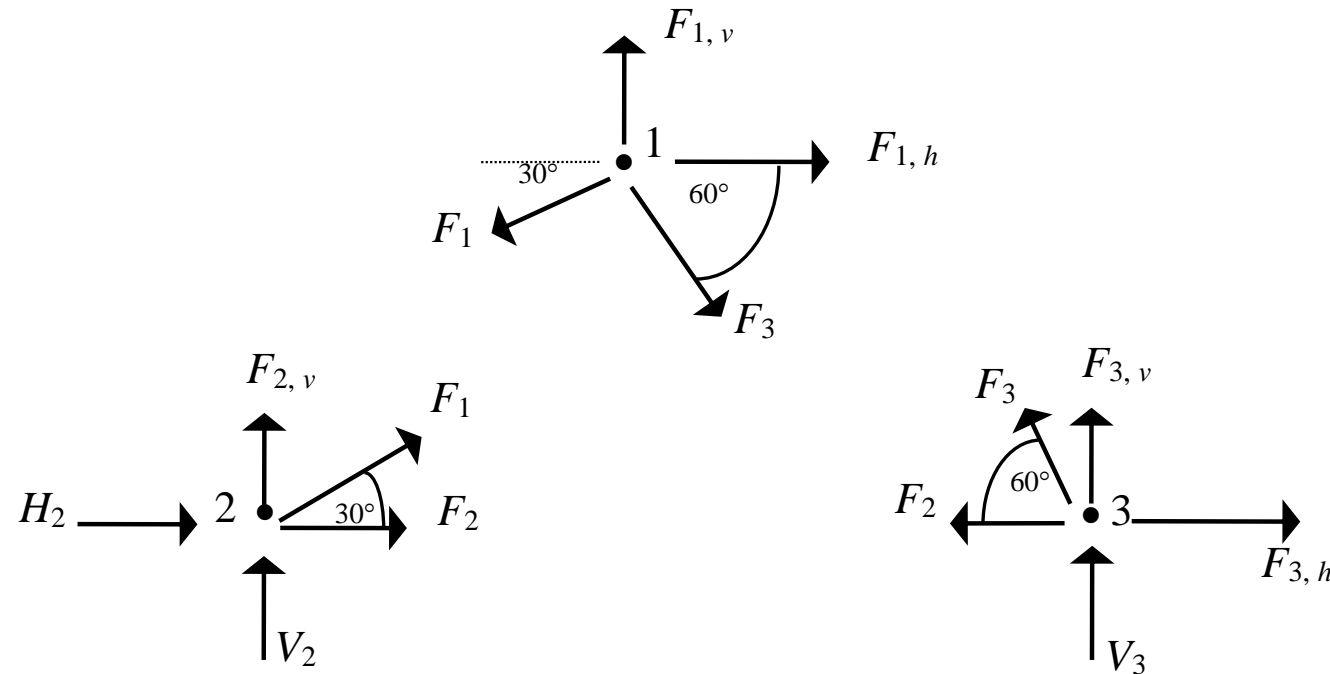


Gambar 1

- Rangka mendapat gaya eksternal sebesar 1000 pon. Gaya ini disebar ke seluruh bagian rangka. Gaya F menyatakan tegangan atau kompresi pada anggota rangka. Reaksi eksternal (H_2 , V_2 , dan V_3) adalah gaya yang mencirikan bagaimana rangka berinteraksi dengan permukaan pendukung.
- Engsel pada simpul 2 dapat menjangkitkan gaya mendatar dan tegak pada permukaan, sedangkan gelinding pada simpul 3 hanya menjangkitkan gaya tegak.



- Struktur jenis ini dapat diuraikan sebagai sistem persamaan linier simultan. Diagram gaya-benda-bebas diperlihatkan untuk tiap simpul dalam Gambar 2.



Gambar 2

Menurut hukum Newton, resultan gaya dalam arah mendatar maupun tegak harus nol pada tiap simpul, karena sistem dalam keadaan diam (statis).

Oleh karena itu, untuk simpul 1,

$$\sum F_H = 0 = -F_1 \cos 30^\circ + F_3 \cos 60^\circ + F_{1,h}$$

$$\sum F_V = 0 = -F_1 \sin 30^\circ - F_3 \sin 60^\circ + F_{1,v}$$

Untuk simpul 2,

$$\sum F_H = 0 = F_2 + F_1 \cos 30^\circ + F_{2,h} + H_2$$

$$\sum F_V = 0 = F_1 \sin 30^\circ - F_{2,v} + V_2$$

dan untuk simpul 3,

$$\sum F_H = 0 = -F_2 - F_3 \cos 60^\circ + F_{3,h}$$

$$\sum F_V = 0 = F_3 \sin 60^\circ + F_{3,v} + V_3$$

- Gaya 1000 pon ke bawah pada simpul 1 berpadanan dengan $F_{1,v} = -1000$, sedangkan semua $F_{i,v}$ dan $F_{i,h}$ lainnya adalah nol.
- Persoalan rangka statis ini dapat dituliskan sebagai sistem yang disusun oleh enam persamaan linier dengan 6 peubah yang tidak diketahui:

$$\sum F_H = 0 = -F_1 \cos 30^\circ + F_3 \cos 60^\circ + F_{1,h} = -0.866F_1 + 0.5 F_3$$

$$\sum F_V = 0 = -F_1 \sin 30^\circ - F_3 \sin 60^\circ + F_{1,v} = -0.5F_1 - 0.866 F_3 + 1000$$

$$\sum F_H = 0 = F_2 + F_1 \cos 30^\circ + F_{2,h} + H_2 = F_2 + 0.866F_1 + 0 + H_2$$

$$\sum F_V = 0 = F_1 \sin 30^\circ - F_{2,v} + V_2 = 0.5 F_1 + V_2$$

$$\sum F_H = 0 = -F_2 - F_3 \cos 60^\circ + F_{3,h} = -F_2 - 0.5 F_3$$

$$\sum F_V = 0 = F_3 \sin 60^\circ + F_{3,v} + V_3 = 0.866 F_3 + V_3$$

- Keenam persamaan di atas ditulis ulang kembali dalam susunan yang teratur berdasarkan urutan peubah $F_1, F_2, F_3, H_2, V_2, V_3$:

$$\begin{array}{rclcl}
 -0.866F_1 & + & 0.5 F_3 & & = 0 \\
 -0.5F_1 & & & - 0.866 F_3 & = -1000 \\
 -0.866F_1 - F_2 & & & & - H_2 & = 0 \\
 -0.5 F_1 & & & & & - V_2 & = 0 \\
 & - F_2 & - 0.5 F_3 & & & & = 0 \\
 & & -0.866 F_3 & & & - V_3 & = 0
 \end{array}$$

- atau dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.866 & 0 & 0 & 0 \\ -0.866 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.866 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ H_2 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

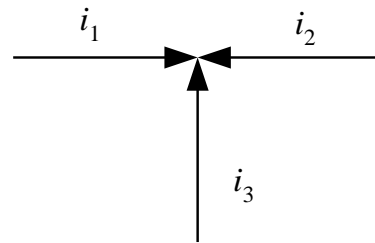
- Nilai F_1 , F_2 , F_3 , H_2 , V_2 , dan V_3 yang memenuhi keenam persamaan tersebut secara simultan dapat ditemukan dengan metode eliminasi Gauss/Gauss-Jordan.

C. Sistem Persamaan Linier di dalam rangkaian listrik

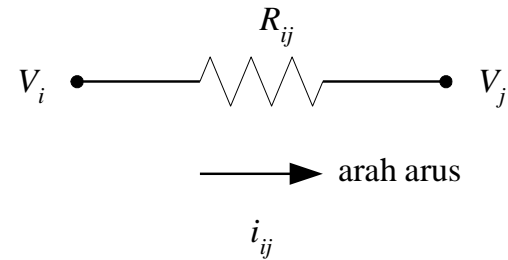
Tinjau contoh persoalan rangkaian listrik...

Dalam sebuah rangkaian listrik berlaku hukum-hukum arus Kirchoff menyatakan bahwa jumlah aljabar dari semua arus yang memasuki suatu simpul (Gambar 1a) haruslah nol:

$$\sum i = 0$$



(a)



(b)

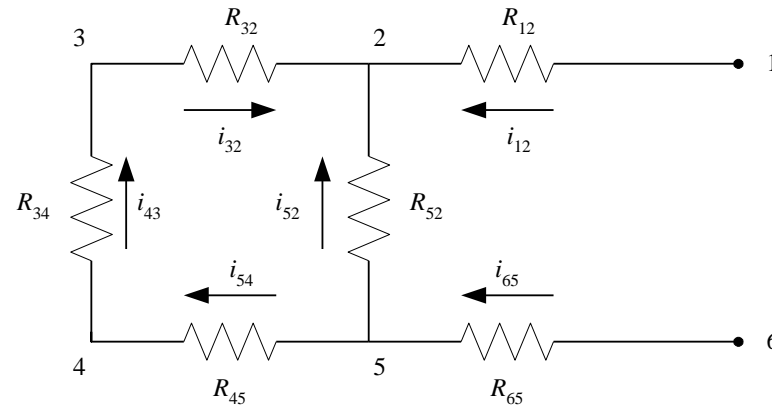
Gambar 1. Hukum Kirchoff dan Hukum Ohm

Dalam hal ini, semua arus i yang memasuki simpul dianggap bertanda positif. Sedangkan hukum Ohm (Gambar 1b) menyatakan bahwa arus i yang melalui suatu tahanan adalah :

$$i_{ij} = \frac{V_i - V_j}{R_{ij}}$$

yang dalam hal ini V adalah tegangan dan R adalah tahanan.

Diberikan sebuah rangkaian listrik dengan 6 buah tahanan seperti pada Gambar 2. Anda diminta menghitung arus pada masing-masing tahanan.



Gambar 2. Rangkaian listrik dengan 6 tahanan

Arah arus dimisalkan seperti diatas. Dengan hukum Kirchoff diperoleh persamaan-persamaan berikut :

$$\begin{array}{rclcl}
 i_{12} & + & i_{52} & + & i_{32} & = & 0 \\
 i_{65} & - & i_{52} & - & i_{54} & = & 0 \\
 i_{43} & - & i_{32} & & & = & 0 \\
 i_{54} & - & i_{43} & & & = & 0
 \end{array}$$

Dari hukum Ohm didapat :

$$\begin{aligned}i_{32} R_{32} - V_3 + V_2 &= 0 \\i_{43} R_{43} - V_4 + V_3 &= 0 \\i_{65} R_{65} + V_5 &= V_6 \\i_{12} R_{12} + V_2 &= V_1 \\i_{54} R_{54} - V_5 + V_4 &= 0 \\i_{52} R_{52} - V_5 + V_2 &= 0\end{aligned}$$

Dengan menyusun kesepuluh persamaan diatas didapatkan sistem persamaan linjar sebagai berikut :

$$\begin{array}{rcccccccc}
i_{12} & + i_{52} & + i_{32} & & & & & & = 0 \\
- i_{52} & & & + i_{65} & - i_{54} & & & & = 0 \\
- i_{32} & & & & & + i_{43} & & & = 0 \\
i_{54} & - i_{43} & & & & & & & = 0 \\
i_{32} R_{32} & & & & & V_2 & - V_3 & & = 0 \\
i_{43} R_{43} & & & & & & + V_3 & - V_4 & = 0 \\
i_{65} R_{65} & & & & & & & + V_5 & = V_6 \\
i_{12} R_{12} & & & & & & + V_2 & & = V_1 \\
i_{54} R_{54} & & & & & & & + V_4 & - V_5 = 0 \\
i_{52} R_{52} & & & & & & + V_2 & & - V_5 = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
 i_{12} & i_{52} & i_{32} & i_{65} & i_{54} & i_{43} & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\
 \left[\begin{array}{cccccccccc}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{32} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{43} & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & R_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 R_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & R_{54} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 0 & R_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1
 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c}
 i_{12} \\
 i_{52} \\
 i_{32} \\
 i_{65} \\
 i_{54} \\
 i_{43} \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5
 \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 V_6 \\
 V_1 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Tentukan

$$i_{12}, i_{52}, i_{32}, i_{65}, i_{54}, i_{43}, V_2, V_3, V_4, V_5$$

bila diketahui

$$R_{12} = 5 \text{ ohm}, \quad R_{52} = 10 \text{ ohm}, \quad R_{32} = 10 \text{ ohm}$$

$$R_{65} = 20 \text{ ohm}, \quad R_{54} = 15 \text{ ohm}, \quad R_{14} = 5 \text{ ohm.}$$

$$V_1 = 200 \text{ volt}, \quad V_6 = 0 \text{ volt.}$$